X դասարան

1) Գտնել n-ի բոլոր բնական արժեքները, որոնց դեպքում $\left[\frac{n^2-n-5}{2}\right]$ արտահայտության արժեքը բնական պարզ թիվ է:

Դիտողություն՝ *[x]-ը x-ը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվն է:*

Լուծում: $\left[\frac{n^2-n-5}{2}\right]=\left[\frac{n^2-n-6}{2}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{n^2-n-6}{2}\right]=\left[\frac{(n-3)(n+2)}{2}\right]$, քանի, որ $n-3$ և $n+2$ թվերը ունեն տարբեր զույգություն, հետևաբար $\frac{(n-3)(n+2)}{2}$ թիվը ամբողջ է, որտեղից՝ $\left[\frac{(n-3)(n+2)}{2}\right]=\frac{(n-3)(n+2)}{2}$:

Քանի, որ $\frac{(n-3)(n+2)}{2}$ թիվը պարզ է, հետևաբար հնարավոր են հետևյալ դեպքերը՝

1) $\frac{n-3}{2}=1$, որտեղից $n=5$ և $\frac{(n-3)(n+2)}{2}=7$:

2) $\frac{n+2}{2}=1$ որտեղից $n=0$:

3) $n-3=1$ որտեղից $n=4$ և $\frac{(n-3)(n+2)}{2}=3$:

1) $\left[\frac{n^2-n-5}{2}\right]=\left[\frac{n^2-n-6}{2}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{n^2-n-6}{2}\right]$: 3 միավոր

2) $\left[\frac{(n-3)(n+2)}{2}\right]=\frac{(n-3)(n+2)}{2}$: 1 միավոր

3) $\frac{n-3}{2}=1$ և $\frac{n+2}{2}=1$: 1 միավոր

4) $n-3=1$: 2 միավոր

* Դիտողություն:Եթե գրված է $n=5$ և $n=4$ պատասխանները: 1 միավոր

2) Գտեք բոլոր n բնական թվերը, որոնց համար գոյություն ունեն a, b և c բնական թվեր այնպես, որ $n^2=a+b+c$ և $n^3=a^2+b^2+c^2$ ։

Լուծում1։ Քանի, որ $n^3=a^2+b^2+c^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{n^4}{3}$, հետևաբար $n\le 3$։

Քանի, որ $n^2=a+b+c\ge 3$, հետևաբար $n\ge 2$։

Ենթադրենք $a\ge b\ge c$։

Երբ $n=2$, $a+b+c=4$ հավասարմանը բավարարում է $(2,1,1)$ եռյակը, իսկ $a^2+b^2+c^2=6\ne 8$ ։

Երբ $n=3$, $a+b+c=9$ հավասարմանը բավարարում են $(4,4,1),(4,3,2),(3,3,3)$ եռյակները, որոնցից $a^2+b^2+c^2=27$ հավասարմանը բավարարում է $(3,3,3)$ եռյակը։

1) $n^2=a+b+c\ge 3$, հետևաբար $n\ge 3$ 1 միավոր

2) $n^3=a^2+b^2+c^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{n^4}{3}$ 4 միավոր

3) $n=3, a=b=c=3$ 2 միավոր

Լուծում2։ $n^3=a^2+b^2+c^2\ge a^2+2bc$։ Նմանապես $n^3=a^2+b^2+c^2\ge b^2+2ac$ և $n^3=a^2+b^2+c^2\ge c^2+2ab$։ Գումարելով ստացված անհավասարությունները կստանանք՝

$3n^3\ge(a+b+c)^2=n^4$, որտեղից $n\le 3$։

Քանի, որ $n^2=a+b+c\ge 3$, հետևաբար $n\ge 2$։ Ենթադրենք $a\ge b\ge c$։

Երբ $n=2$, $a+b+c=4$ հավասարմանը բավարարում է $(2,1,1)$ եռյակը, իսկ $a^2+b^2+c^2=6\ne 8$ ։

Երբ $n=3$, $a+b+c=9$ հավասարմանը բավարարում են $(4,4,1),(4,3,2),(3,3,3)$ եռյակները, որոնցից $a^2+b^2+c^2=27$ հավասարմանը բավարարում է $(3,3,3)$ եռյակը։

1) $n^2=a+b+c\ge 3$, հետևաբար $n\ge 2$ 1 միավոր

2) $n^3=a^2+b^2+c^2\ge a^2+2bc$ 2 միավոր

3) $3n^3\ge(a+b+c)^2=n^4$ 2 միավոր

4) $n=3, a=b=c=3$ 2 միավոր

Դիտողություն 1։ Քննարկված է $n=1,2,3$ դեպքերը և ստացված է $a=b=c=3$։ 1 միավոր

Դիտողություն 2։ Ստացվել է n–ի սահմանափակ քանակությամբ արժեքներ։ 3 միավոր

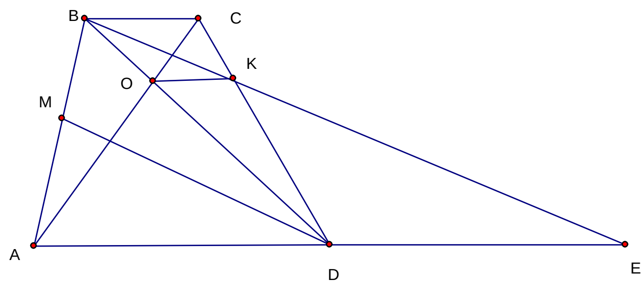
Օրինակ։ Ենթադրենք $a\ge b\ge c$։ Քանի, որ $n^2=a+b+c\le 3a$, հետևաբար $a\ge\frac{n^2}{3}$ և

$n^3=a^2+b^2+c^2>a^2\ge\frac{n^4}{9}$, որտեղից $n\le 9$։

3) Դիցուք AD մեծ և BC փոքր հիմքերով $ABCD$ սեղանում O–ն անկյունագծերի հատման կետն է, իսկ M –ը AB հատվածի միջնակետն է: Դիցուք O կետից AD–ին տարված զուգահեռ ողիղը CD–ն հատում է K կետում: Ապացուցել, որ BK և DM ուղիղները զուգահեռ են:

Լուծում1: Դիցուք AD և BK ուղիղները հատվում են E կետում: Քանի, որ $\Delta DEK \sim \Delta BCK$, հետևաբար $\frac{DE}{BC}=\frac{KD}{CK}$: Ըստ Թալեսի թեորեմի՝ $\frac{DK}{KC}=\frac{AO}{CO}$ և $\Delta AOD \sim \Delta BOC$, հետևաբար $\frac{AO}{CO}=\frac{AD}{BC}$:

Համադրելով ստացված հարաբերությունները կստանանք՝ $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{BC}$, որտեղից՝ $AD=DE$ և $AM=BM$, հետևաբար DM –ը ABE եռանկյան միջին գիծն է, հետևաբար $BK \parallel DM$:



1) AD և BK ուղիղները հատվում են E կետում — 1 միավոր

2) $\frac{DE}{BC}=\frac{KD}{CK}$ — 2 միավոր

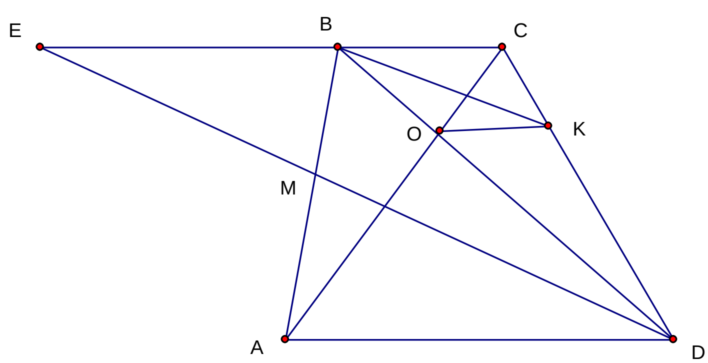
3) $\frac{DK}{KC}=\frac{AO}{CO}$ — 1 միավոր

4) $\frac{AO}{CO}=\frac{AD}{BC}$ — 1 միավոր

5) $AD=DE$ — 1 միավոր

6) $BK \parallel DM$ — 1 միավոր

Լուծում2: Դիցուք DM և BC ուղիղները հատվում են E կետում: Քանի, որ $\Delta EBM=\Delta AMD$, հետևաբար $AD=BE$:



Քանի, որ $\Delta AOD : \Delta BOC$, հետևաբար $\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{AO}{CO}$: Ըստ Թալեսի թեորեմի՝ $\dfrac{DK}{KC}=\dfrac{AO}{CO}$, հետևաբար $\dfrac{EB}{BC}=\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{AO}{CO}=\dfrac{DK}{KC}\Rightarrow BK\,\mathrm{P}DM$:

1) DM և BC ուղիղները հատվում են E կետում: 1 միավոր

2) $AD=BE$ 1 միավոր

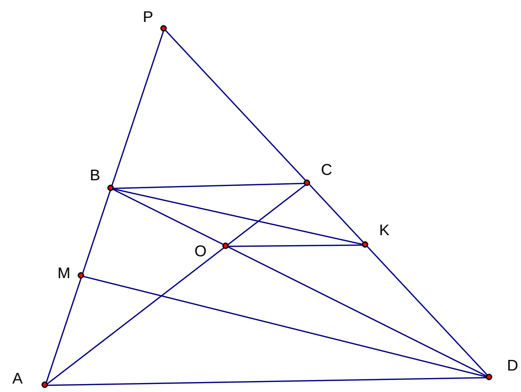
3) $\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{AO}{CO}$ 1 միավոր

4) $\dfrac{DK}{KC}=\dfrac{AO}{CO}$ 1 միավոր

5) $\dfrac{EB}{BC}=\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{AO}{CO}=\dfrac{DK}{KC}\Rightarrow BK\,\mathrm{P}DM$ 3 միավոր

Լուծում3: Դիցուք AB և CD ուղիղները հատվում են P կետում և $AD=b, BC=a$: Քանի, որ $\Delta BOC : \Delta AOD$, հետևաբար $BO=ax, DO=bx$: $\Delta DOK : \Delta BCD$, հետևաբար $CK=at, DK=bt$:

$\Delta APD : \Delta BPC$, հետևաբար $\dfrac{PC}{PD}=\dfrac{a}{b}\Rightarrow\dfrac{PC+at+bt}{PC}=\dfrac{b}{a}\Rightarrow PC=\dfrac{at(a+b)}{b-a}, PK=PC+CK=\dfrac{2abt}{b-a}$



$BK\,\mathrm{P}DM \Leftrightarrow \dfrac{PB}{BM}=\dfrac{PK}{KD}$,որտեղից

$\dfrac{PB}{BM}=\dfrac{2PB}{AB}=\dfrac{2PC}{CD}=\dfrac{PK}{KD}$, որը ճիշտ է քանի, որ

$\dfrac{2PC}{CD}=\dfrac{2a}{b-a}$ և $\dfrac{PK}{KD}=\dfrac{2a}{b-a}$:

1) AB և CD ուղիղները հատվում են P կետում
1 միավոր

2) $BO=ax, DO=bx$ 1 միավոր

3) $CK=at, DK=bt$ 1 միավոր

4) $PC=\dfrac{at(a+b)}{b-a}, PK=PC+CK=\dfrac{2abt}{b-a}$ 2 միավոր

5) $BK\,\mathrm{P}DM \Leftrightarrow \dfrac{PB}{BM}=\dfrac{PK}{KD}$ 1 միավոր

6) $BK\,\mathrm{P}DM$ 1 միավոր

4) Շրջանագծի վրա նշել են 30 կետեր և նրանցից յուրաքանչյուր երկուսը միացրել են հատվածով: Այդ հատվածներից յուրաքանչյուրը կամայական ձևով ներկել են երկու գույներից մեկով՝ կարմիր կամ կապույտ, ընդ որում կապույտ հատվածների քանակը զույգ է: Թույլատրվում է կամայական տարագույն (այսինքն բոլոր կողմերը նույն գույնի չեն) եռանկյան երկու միագույն կողմերը ներկել այնպես, որ եռանկյունը դառնա միագույն: Հնարավո՞ր է արդյոք այդ գործողության հաջորդական կիրառումների միջոցով բոլոր հատվածները սարքել նույն գույնի:

Լուծում: Հատվածների քանակը հավասար է $\frac{30\cdot 29}{2}=435$, որը կենտ թիվ է, հետևաբար յուրաքանչյուր քայլից հետո կարմիր գույնի հատվածների քանակը կենտ է, իսկ կապույտ գույնի հատվածների քանակը զույգ: Ենթադրենք հնարավոր չէ բոլոր հատվածները ներկել կարմիր գույնով: Քննարկենք այն դեպքը, որը բոլոր հնարավոր դեպքերից այն է, որում կարմիր հատվածների քանակը մեծագույնն է:

Կասենք, որ կետը կապույտ է, եթե նրանից դուրս է գալիս գոնե մեկ կապույտ հատված: Քանի, որ կա կապույտ հատված և նրանց քանակը զույգ է, ապա կապույտ հատվածների քանակը գոնե 2 է, հետևաբար կա գոնե երեք կապույտ գագաթ:

Դիցուք A և B գագաթները կապույտ են: Ապացուցենք, որ AB հատվածը ներկած է կապույտ: Ենթադրենք հակառակը, այսինքն այն կարմիր է: Եթե գոյություն ունի C գագաթ, որ AC և BC հատվածները կապույտ են, ապա նրանք կարելի է ներկել կարմիր գույնով, որը հնարավոր չէ, քանի որ կարմիր հատվածների քանակը մեծագույնն էր, հետևաբար այդպիսի C կետ գոյություն չունի:

Այսպիսով կգտվեն C և D կետեր այնպես, որ AC, BD հատվածները կապույտ են, իսկ BC, AD հատվածները՝ կարմիր: Եթե հերթականությամբ ներկենք ABC եռանկյան կողմերը կապույտ, իսկ ABD և ABC եռանկյան կողմերը կարմիր, ապա կարմիր հատվածների քանակը կավելանա: Ապացուցվածից հետևում է, որ կապույտ գագաթները միացնող հատվածները կապույտ է, իսկ մնացած հատվածները կարմիր:

Դիցուք A, B, C կետերը կապույտ են, իսկ D–ն՝ ոչ: Եթե հերթականությամբ ներկենք ABD եռանկյան AD, BD կողմերը կապույտ, իսկ ACD և BCD եռանկյան AC, AD, BC, BD կողմերը կարմիր, ապա կարմիր հատվածների քանակը կավելանա, որը հնարավոր չէ, քանի, որ կարմիր հատվածների քանակը մեծագույնն էր, հետևաբար կապույտ հատվածներ քննարկված դեպքում չկան:

Յուրաքանչյուր քայլից հետո կապույտ գույնի հատվածների քանակը զույգ է:	1 միավոր
Քննարկած է այն դեպքը, երբ կարմիր հատվածների քանակը մեծագույնն է:	1 միավոր
A և B գագաթները կապույտ են, ապա AB հատվածը նույնպես կապույտ է:	3 միավոր
Խնդիրը ավարտել է	2 միավոր