

VIII դասարան

1) **Գտեք**  $4x^2 + 2y^2 - 4xy + y$  **արտահայտության փոքրագույն արժեքը, որտեղ**  $x$  **-ը և**  $y$  **-ը բնական թվեր են:**

Լուծում 1:

- 1)  $A = 4x^2 + 2y^2 - 4xy + y = (2x - y)^2 + y^2 + y \geq y^2 + y$  : 2 միավոր
- 2)  $A \geq 2$  : 1 միավոր
- 3)  $A = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow x \notin N$  : 1 միավոր
- 4)  $A \neq 2 \Rightarrow y \geq 2 \Rightarrow A \geq 6$  : 1 միավոր
- 5)  $\min A = 6$ , երբ  $x = 1; y = 2$  : 2 միավոր

Լուծում 2:

- 1)  $A = 4x^2 + 2y^2 - 4xy + y = 4x^2 + y^2 + y^2 - 4xy + y \geq 4xy + y^2 - 4xy + y = y^2 + y$  : 2 միավոր
- 2)  $A \geq 2$  : 1 միավոր
- 3)  $A = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow x \notin N$  : 1 միավոր
- 4)  $A \neq 2 \Rightarrow y \geq 2 \Rightarrow A \geq 6 \min A = 6$  : 1 միավոր
- 5)  $\min A = 6$ , երբ  $x = 1; y = 2$  : 2 միավոր

2) **Իրարից տարբեր հինգ բնական թվերից ընտրել են կամայական երկուսը և գումարել: Ամենաքիչը քանի՞ տարբեր գումարներ կարելի է ստանալ:**

Լուծում: Դիցուք  $a < b < c < d < e$ : 1 միավոր

Քանի, որ  $a + b < a + c < b + c < b + d < c + d < c + e < d + e$ , հետևաբար այդ գումարներից առնվազն յոթը տարբեր են: 4 միավոր

1,2,3,4,5 թվերի դեպքում ստացվում է ուղիղ յոթ տարբեր գումար: 2 միավոր

3) **Գրատախտակին գրված են 1;2;...;50 բնական թվերը: Ամենաքիչը քանի՞ թիվ պետք է ջնջել այդ թվերից, որպեսզի մնացած թվերից ցանկացած երկու թվերի գումարը չլինի պարզ թիվ:**

Լուծում: 1;2;...;50 բնական թվերը բաժանենք  $(1,46), (2,45), (3,44), \dots, (23,24), (47,50), (48,49)$  զույգերի: 3 միավոր

Եթե ջնջենք 24 թիվ, ապա կգտնվեն երկու թիվ, որոնք պատկանում են միևնույն թվազույգին, որոնց գումարը պարզ թիվ է: 3 միավոր

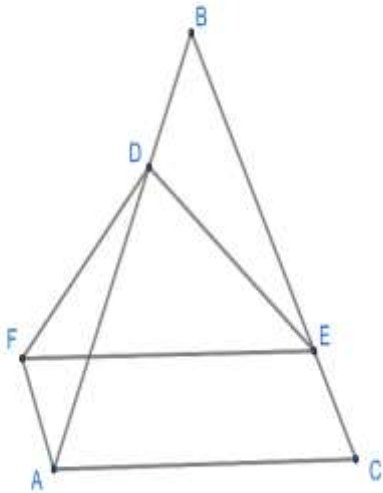
Եթե ջնջենք բոլոր կենտ թվերը կամ բոլոր զույգ թվերը, ապա մնացած թվերից կամայական երկուսի գումարը բաղադրյալ է: 1 միավոր

4)  $ABC$  հավասարասրուն եռանկյան  $AB$  և  $BC$  սրունքների վրա վերցրել են համապատասխանաբար  $D$  և  $E$  կետերն այնպես, որ  $\angle DEB = 25^\circ$ ,  $\angle ADE = 35^\circ$  և  $BD = CE$ : Ապացուցեք, որ  $DE = AC$ :

Լուծում1: 1) Դիցուք  $ACEF$  քառանկյունը զուգահեռագիծ է: 2 միավոր

2)  $AF = DB$ ,  $AD = BE$ ,  $\angle FAD = \angle DBE \Rightarrow \triangle AFD = \triangle DBE \Rightarrow FD = DE$ : 3 միավոր

3)  $FD = DE$ ,  $\angle FDE = 60^\circ \Rightarrow FD = DE = FE = AC$ : 2 միավոր



Դիտողություն. Եթե կատարված է որևէ օժանդակ կառուցում.

1 միավոր

IX դասարան

1) Գտեք  $8x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 4xz + y$  արտահայտության փոքրագույն արժեքը, որտեղ  $x, y, z$  -ը բնական թվեր են:

Լուծում1:

1)  $A = 8x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 4xz + y = (2x - y)^2 + (2x - z)^2 + y^2 + y \geq y^2 + y$  : 2 միավոր

2)  $A \geq 2$  : 1 միավոր

3)  $A = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow x \notin N$  : 1 միավոր

4)  $A \neq 2 \Rightarrow y \geq 2 \Rightarrow A \geq 6$  1 միավոր

5)  $\min A = 6$ , երբ  $x = 1; y = 2; z = 2$ : 2 միավոր

Լուծում2:

1)  $A = 8x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 4xz + y = 4x^2 + y^2 + 4x^2 + z^2 + y^2 - 4xy - 4xz + y^2 + y \geq 4xy + 4xy + y^2 - 4xy - 4xz + y = y^2 + y$  : 2 միավոր

2)  $A \geq 2$  : 1 միավոր

3)  $A = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow x \notin N$  : 1 միավոր

4)  $A \neq 2 \Rightarrow y \geq 2 \Rightarrow A \geq 6$  1 միավոր

5)  $\min A = 6$ , երբ  $x = 1; y = 2; z = 2$ : 2 միավոր

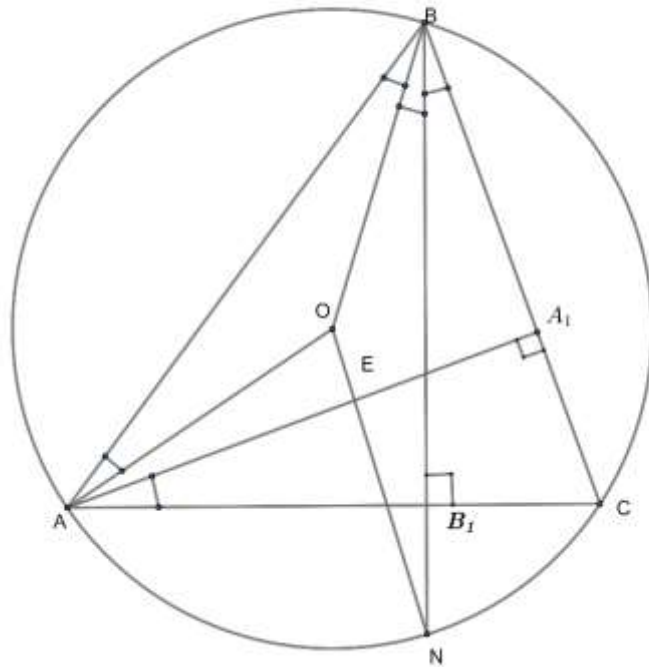
2)  $O$  կենտրոնով  $\omega$  շրջանագծին ներգծած  $ABC$  եռանկյան մեջ  $\angle B = 60^\circ, \angle C = 70^\circ$ :  $BB_1$  բարձրությունը պարունակող ուղիղը  $\omega$ -ն հատում է  $N$  կետում, իսկ  $ON$ -ը և  $AA_1$  բարձրությունը հատվում են  $E$  կետում: Սպացուցեք, որ  $A, E, B_1, N$  կետերով անցնում է շրջանագիծ:

Լուծում: 1)  $\angle AOB = 140^\circ \Rightarrow \angle BAO = \angle ABO = 20^\circ$ : 2 միավոր

2)  $\angle ABB_1 = 40^\circ \Rightarrow \angle AON = 80^\circ$ : 1 միավոր

3)  $\angle OAE = \angle BAE - \angle BAO = 10^\circ$ : 2 միավոր

4)  $\angle AEN = \angle AB_1N = 90^\circ$ , հետևաբար  $A, E, B_1, N$  կետերով անցնում է շրջանագիծ: 2 միավոր



3) Իրարից տարբեր հինգ բնական թվերից ընտրել են կամայական երեքը և գումարել: Ամենաքիչը քանի՞ տարբեր գումարներ կարելի է ստանալ:

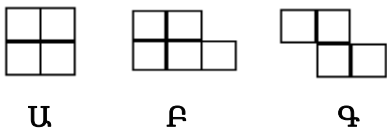
Լուծում: Դիցուք  $a < b < c < d < e$ : 1 միավոր

Եռյակների գումարի տարբեր լինելը համարժեք է գույգերի գումարի տարբեր լինելուն: 2 միավոր

Քանի, որ  $a+b < a+c < b+c < b+d < c+d < c+e < d+e$ , հետևաբար այդ գումարներից առնվազն յոթը տարբեր են: 2 միավոր

1,2,3,4,5 թվերի դեպքում ստացվում է ուղիղ յոթ տարբեր գումար: 2 միավոր

4) Տրված են երեք տեսակի լեզոներ՝ Ա, Բ, Գ:



Տրված լեզոներով հավաքել են  $8 \times 9$  չափի ուղղանկյուն: Ամենաքիչը քանի՞ Բ տեսակի լեզո են օգտագործել:

Լուծում: Ներկենք 8 երկարության 9 շարքերը հերթագայությամբ սև և սպիտակ գույներով:

3 միավոր

Ա և Գ տեսակի յուրաքանչյուր լեզո պարունակում է 2 սև և 2 սպիտակ վանդակներ, իսկ Բ տեսակի լեզոն՝ 2 սև, 3 սպիտակ կամ 3 սև, 2 սպիտակ վանդակներ: Քանի, որ սև վանդակների քանակը 8-ով ավելի է, հետևաբար առնվազն կօգտագործի 8 հատ Բ տեսակի լեզո: 2 միավոր

Բերենք օրինակ, որտեղ օգտագործվում է ուղիղ 8 Բ տեսակի լեզո: Կազմում ենք  $2 \times 7$  չափի ուղղանկյուն, որոնցով կազմում ենք  $8 \times 7$  չափի ուղղանկյուն, իսկ մնացած չափի  $2 \times 8$  ուղղանկյունը հավաքում ենք Ա տեսակի լեզոներով: 2 միավոր



Ճիշդ պատասխան

1) Գտեք  $a, b, c$  թվերի բոլոր եռյակները, եթե գոյություն ունի  $(a, b, c)$  թվերի տեղափոխություն, որը համընկնում է  $(a^2 + 2b, b^2 + 2c, c^2 + 2a)$  եռյակի հետ և  $a + b + c = -3$ :

Լուծում 1: 1) Քանի, որ  $(a, b, c)$  եռյակի ինչ-որ տեղափոխություն համընկնում է  $(a^2 + 2b, b^2 + 2c, c^2 + 2a)$  եռյակի հետ, ապա  $a^2 + 2b + b^2 + 2c + c^2 + 2a = a + b + c$ :

2 միավոր

2)  $a^2 + 2b + b^2 + 2c + c^2 + 2a = -3$ :

1 միավոր

3)  $(a+1)^2 + (b+1)^2 + (c+1)^2 = 0$ :

3 միավոր

4)  $a = b = c = -1$ :

1 միավոր

Լուծում 2: 1) Քանի, որ  $(a, b, c)$  եռյակի ինչ-որ տեղափոխություն համընկնում է  $(a^2 + 2b, b^2 + 2c, c^2 + 2a)$  եռյակի հետ, ապա  $a^2 + 2b + b^2 + 2c + c^2 + 2a = a + b + c$ :

2 միավոր

2)  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ :

1 միավոր

3)  $3 = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} + \frac{c^2}{1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$ :

3 միավոր

4)  $a = b = c = -1$ :

1 միավոր

2)  $O$  կենտրոնով  $\omega$  շրջանագծին ներգծած  $ABC$  եռանկյան մեջ  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 70^\circ$ :  $BB_1$  բարձրությունը պարունակող ուղիղը  $\omega$ -ն հատում է  $N$  կետում, իսկ  $ON$ -ը և  $AA_1$  բարձրությունը հատվում են  $E$  կետում: Ապացուցեք, որ  $B_1E = B_1N$ :

Լուծում: 1)  $\angle AOB = 140^\circ \Rightarrow \angle BAO = \angle ABO = 20^\circ$ :

1 միավոր

2)  $\angle ABB_1 = 40^\circ \Rightarrow \angle AON = 80^\circ$ :

1 միավոր

3)  $\angle OAE = \angle BAE - \angle BAO = 10^\circ \Rightarrow \angle AEO = 90^\circ$ :

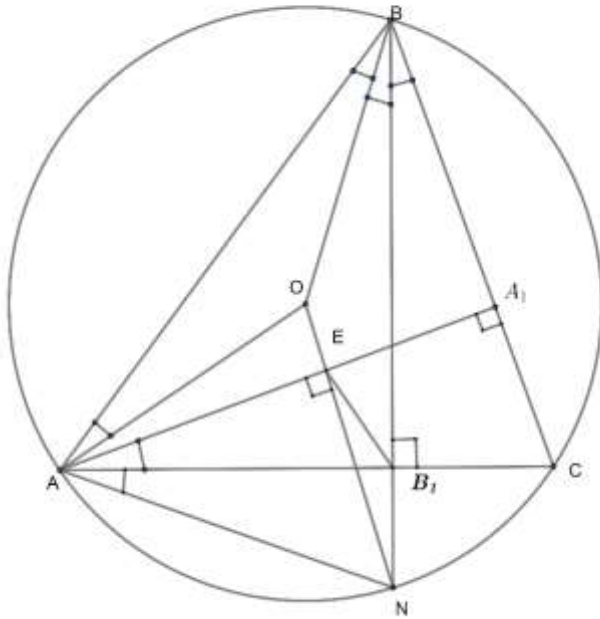
1 միավոր

4)  $\angle AEN = \angle AB_1N = 90^\circ \Rightarrow A, E, B_1, N$  կետերով անցնում է շրջանագիծ:

2 միավոր

5)  $\angle NEB_1 = \angle ENB_1 = 20^\circ \Rightarrow EB_1 = B_1N$ :

2 միավոր



3) Իրարից տարբեր վեց բնական թվերից ընտրել են կամայական չորսը և գումարել: Ամենափչը քանի՞ տարբեր գումարներ կարելի է ստանալ:

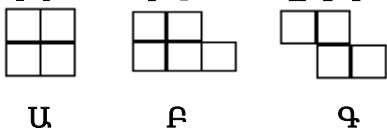
Լուծում: Դիցուք  $a < b < c < d < e < f$ : 1 միավոր

Քառյակների գումարի տարբեր լինելը համարժեք է գույգերի գումարի տարբեր լինելուն: 1 միավոր

Քանի, որ  $a+b < a+c < b+c < b+d < c+d < c+e < d+e < d+f < e+f$ , հետևաբար այդ գումարներից առնվազն իննը տարբեր են: 3 միավոր

1,2,3,4,5,6 թվերի դեպքում ստացվում է ուղիղ իննը տարբեր գումար: 2 միավոր

4) Տրված են երեք տեսակի լեզուներ՝ Ա, Բ, Գ:



Տրված լեզուներով հավաքել են  $20 \times 17$  չափի ուղղանկյուն: Ամենափչը քանի՞ Բ տեսակի լեզո են օգտագործել :

Լուծում: Ներկենք 20 երկարության 17 շարքերը հերթագայությամբ սև և սպիտակ գույներով: 3 միավոր

Ա և Գ տեսակի յուրաքանչյուր լեզո պարունակում է 2 սև և 2 սպիտակ վանդակներ, իսկ Բ տեսակի լեզոն՝ 2 սև, 3 սպիտակ կամ 3 սև, 2 սպիտակ վանդակներ: Քանի, որ սև վանդակների քանակը 20-ով ավելի է, հետևաբար առնվազն կօգտագործի 20 հատ Բ տեսակի լեզո:

2 միավոր

Բերենք օրինակ, որտեղ օգտագործվում է ուղիղ 20 Բ տեսակի լեզո: Կազմում ենք  $2 \times 7$  չափի ուղղանկյուն, որոնցով կազմում ենք  $20 \times 7$  չափի ուղղանկյուն, իսկ մնացած չափի  $20 \times 10$  ուղղանկյունը հավաքում ենք Ա տեսակի լեզուներով:

2 միավոր





XI-XII դասարան

1) Գտեք  $a, b, c$  թվերի բոլոր եռյակները, եթե գոյություն ունի  $(a, b, c)$  թվերի տեղափոխություն, որը համընկնում է  $(a^4 - 2b^2, b^4 - 2c^2, c^4 - 2a^2)$  եռյակի հետ և  $a + b + c = -3$ :

Լուծում 1: 1) Քանի, որ  $(a, b, c)$  եռյակի ինչ-որ տեղափոխություն համընկնում է  $(a^4 - 2b^2, b^4 - 2c^2, c^4 - 2a^2)$  եռյակի հետ, ապա  $a^4 - 2b^2 + b^4 - 2c^2 + c^4 - 2a^2 = a + b + c$ :

2 միավոր

2)  $a^4 - 2b^2 + b^4 - 2c^2 + c^4 - 2a^2 = -3$  :

1 միավոր

3)  $(a^2 - 1)^2 + (b^2 - 1)^2 + (c^2 - 1)^2 = 0$  :

3 միավոր

4)  $a = b = c = -1$ :

1 միավոր

2)  $O$  կենտրոնով  $\omega$  շրջանագծին ներգծած  $ABC$  եռանկյան մեջ  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 70^\circ$ :  $BB_1$  բարձրությունը պարունակող ուղիղը  $\omega$ -ն հատում է  $N$  կետում, իսկ  $ON$ -ը և  $AA_1$  բարձրությունը հատվում են  $E$  կետում: Ապացուցեք, որ  $B_1, E, M$  կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա, որտեղ  $M$  -ը  $AB$  հատվածի միջնակետն է:

Լուծում: Դիցուք  $B_1E$  ուղիղը  $AB$ -ն հատում է կետում:

1)  $\angle AOB = 140^\circ \Rightarrow \angle BAO = \angle ABO = 20^\circ$ :

1 միավոր

2)  $\angle ABB_1 = 40^\circ \Rightarrow \angle AON = 80^\circ \Rightarrow \angle OAE = \angle BAE - \angle BAO = 10^\circ \Rightarrow \angle AEO = 90^\circ$ :

2 միավոր

3)  $\angle AEN = \angle AB_1N = 90^\circ \Rightarrow A, E, B_1, N$  կետերով անցնում է շրջանագիծ:

2

միավոր

4)  $\angle ANE = \angle AB_1E = 50^\circ = \angle MAB_1 \Rightarrow AM = MB_1 = MB$ :

2 միավոր

3) Տրված է  $a_n = 2019 \cdot 2^{n-1}$  հաջորդականությունը: Ապացուցեք, որ գոյություն ունեն  $a_n$

հաջորդականության անվերջ քանակությամբ անդամներ, որոնք բազմապատիկ են  $a_{2019}$ -ին:

Լուծում: Ապացուցենք, որ գոյություն ունի մեկերով գրվող բնական թիվ, որը բաժանվում է  $a_{2019}$ -ի:

2 միավոր

Գրենք  $1, 11, 111, \dots, 1 \underbrace{111}_{a_{2019}}$  թվերը: Դիցուք նրանցից որևէ մեկը չի բաժանվում  $a_{2019}$ -ի,

հետևաբար գոյություն ունեն այդ թվերից երկուսը, որոնք  $a_{2019}$ -ի վրա բաժանելիս ստացվում է նույն մնացորդը, ուստի նրանց տարբերությունը  $1 \underbrace{111}_{p} \underbrace{111}_{q} 0$  տեսքի է: Քանի, որ  $a_{2019}$ -ը

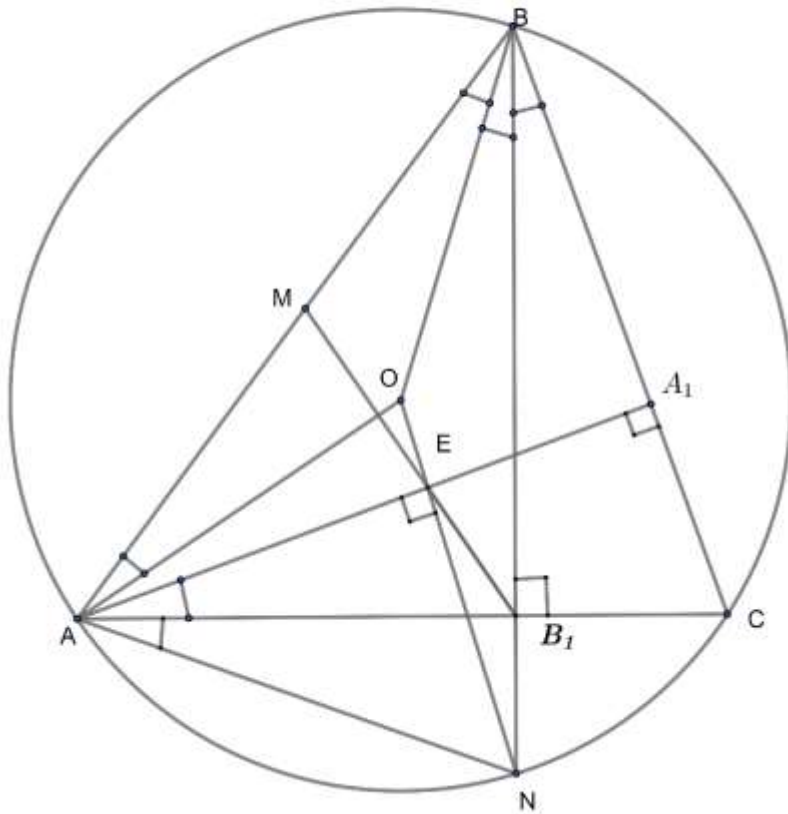
կենտ է և չի բաժանվում 5-ի, հետևաբար  $1 \underbrace{111}_{p}$  թիվը բաժանվում է  $a_{2019}$ -ի: :

3 միավոր

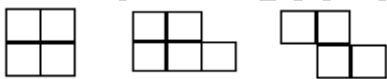
Դիցուք  $A = 11 \frac{1}{l}$  թիվը բաժանվում է  $a_{2019}$ -ի:

Այդ դեպքում  $a_{2019+l} = 10^l a_{2019} + 9AM_{2019} \Rightarrow a_{2019+kl} M_{2019}$  կամայական  $k \in \mathbb{N}$  համար :

2 միավոր



4) Տրված են երեք տեսակի լեզուներ՝ Ա, Բ, Գ:



Ա                      Բ                      Գ

Տրված լեզուներով հավաքել են  $2018 \times 2019$  չափի ուղղանկյուն: Ամենաքիչը քանի՞ Բ տեսակի լեզու են օգտագործել :

Լուծում: Ներկենք 2018 երկարության 2019 շարքերը հերթագայությամբ սև և սպիտակ գույներով: 3 միավոր

Ա և Գ տեսակի յուրաքանչյուր լեզու պարունակում է 2 սև և 2 սպիտակ վանդակներ, իսկ Բ տեսակի լեզուն՝ 2 սև, 3 սպիտակ կամ 3 սև, 2 սպիտակ վանդակներ: Քանի, որ սև վանդակների քանակը 2018-ով ավելի է, հետևաբար առնվազն կօգտագործի 2018 հատ Բ տեսակի լեզու:

2 միավոր

Բերենք օրինակ, որտեղ օգտագործվում է ուղիղ 2018 Բ տեսակի լեզո: Կազմում ենք  $2 \times 7$  չափի ուղղանկյուն, որտեղով կազմում ենք  $2018 \times 7$  չափի ուղղանկյուն, իսկ մնացած  $2012 \times 2018$  չափի ուղղանկյունը հավաքում ենք Ա տեսակի լեզուներով: 2 միավոր

