IX դասարան

1) **Ա-1, Բ-1** Դիցուք x, y, z թվերը բնական են: Հայտնի է, որ $x^3y^5z^6$ թիվը բնական թվի տասնմեկ աստիճան է: Ապացուցեք, որ $x^2y^7z^4$ թիվը ինչ-որ բնական թվի տասնմեկ աստիճան է:

Լուծում 1: Դիցուք p պարզ թիվը x, y, z թվերի վերլուծության մեջ մտնում է a, b, c աստիճանացույցերով: Այդ դեպքում՝ $3a+5b+6c \vdots 11$: +2 միավոր

Պետք է ապացուցել, որ $2a+7b+4c \vdots 11$: Քանի, որ
$8(3a+5b+6c) = 11(2a+3b+4c) + 2a+7b+4c$ և $8(3a+5b+6c) \vdots 11$ և $11(2a+3b+4c) \vdots 11$, հետևաբար $2a+7b+4c \vdots 7$: 7 միավոր

Դիտողություն: Եթե խնդիրը բերվել է a, b, c թվերի որևէ գծային կոմբինացիաի, որը բաժանվում է 11-ի: + 1 միավոր

Լուծում 2: Դիցուք $x^3y^5z^6 = a^{11}$: Այդ դեպքում
$a^{88} = \left(a^{11}\right)^8 = \left(x^3y^5z^6\right)^8 = x^{24}y^{40}z^{48} = \left(x^2y^3z^4\right)^{11} \cdot x^2y^7z^4$ հետևաբար $x^2y^7z^4 = b^{11}$:

7 միավոր

Դիտողություն: Եթե ստացվել է $x^q y^r z^t$ տեսքի թիվ, որը որևէ բնական թվի տասնմեկ աստիճան է: 3 միավոր

2) **Ա-2, Բ-3** Գտեք 2017-ի բաժանվող այն 12-անիշ թվերի քանակը, որոնց վերջին չորս թվանշանները ջնջելիս ստացված 8- անիշ թիվը բաժանվում է 2017-ի, իսկ վերջին յոթ թվանշանները ջնջելիս ստացված 5- անիշ թիվը նույնպես բաժանվում է 2017-ի:

Լուծում : Քանի, որ 12-անիշ առաջին հինգ և ութ թվանշաններով կազմված թիվը բաժանվում է 2017-ի, հետևաբար նրա վեցերորդ, յոթերորդ և ութերորդ թվանշանները 0-ն են: + 1 միավոր

Քանի, որ $10^4 \le 2017k < 10^5$, որտեղից $5 \le k < 50$, հետևաբար 2017-ին բազմապատիկ հնգանիշ թվերի քանակը 45 է: + 2 միավոր

Քանի, որ 12-անիշ թիվը բաժանվում է 2017-ի, հետևաբար նրա վերջին չորս թվանշաներով կազմված **թիվը** նույնպես բաժանվում է 2017-ի, հետևաբար այն կարող է լինել՝ 0000, 2017, 4034, 6051, 8068:

+ 2 միավոր

Քանի, որ առաջին հինգ թվանշաններից կազմված ֆիքսած յուրաքանչյուր թվին համապատասխանում է 0000, 2017, 4034, 6051, 8068 **թվեր**-ից յուրաքանչյուրը, հետևաբար խնդրի պայմաններին բավարարում է $45 \cdot 5 = 225$ թիվ:
+ 2 միավոր

Դիտողություն: Եթե գրված չէ 0000, 2017, 4034, 6051, 8068 **թվեր**-ից որևէ մեկը:

- 1 միավոր

3) **Բ-2** Ապացուցել, որ ցանկացած իրական a, b, c թվերի համար $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$ և $cx^2 + 2ax + b = 0$ հավասարումներից գոնե մեկը կունենա իրական արմատ:
Լուծում: Կատարենք հակասող ենթադրություն, համարելով որ ոչ մի հավասարում չունի իրական արմատ +1միավոր

Հետևաբար երեք հավասարումների դիսկրիմինանտներն էլ բացասական են

+1 միավոր

Հետևաբար $a^2 < bc$, $b^2 < ac$ և $c^2 < ab$ +2 միավոր

Բազմապատկելով այդ երեք անհավասարումները

Կստանանք, որ $a^2b^2c^2 < a^2b^2c^2$ +2միավոր

Գալ հակասության և ավարտել խնդիրը +1միավոր

4) **Ա-3** Դիցուք $a,b,c>0$ և $(a+c)(b^2+ac)=4a$ ։ Ապացուցեք, որ $b+c\le 2$։

Լուծում 1: $4a=(a+c)(b^2+ac)=a(b^2+c^2)+c(b^2+a^2)\ge a(b^2+c^2)+2cab=a(b+c)^2\Rightarrow$

$(b+c)^2\le 4\Rightarrow b+c\le 2$,քանի, որ $b,c>0$։

Լուծում 2:

$(a+c)(b^2+ac)=4a\Rightarrow \dfrac{4}{a+c}=\dfrac{b^2}{a}+c=\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{c}\ge\dfrac{(b+c)^2}{a+c}\Rightarrow(b+c)^2\le 4\Rightarrow b+c\le 2$, քանի, որ $b,c>0$։

Եթե տրվել է որևէ գնահատական	1 միավոր
Եթե տրվել է $b+c$-ի որևէ գնահատական	3 միավոր
Խնդիրը լուծված է	7 միավոր

Լուծում 3: $(a+c)(b^2+ac)=4a\Leftrightarrow c\cdot a^2+(b^2+c^2-4)\cdot a+b^2c=0$, որը a-ից կախված քառակուսի հավասարում է, որի լուծում ունենալու անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է՝ $D=(b^2+c^2-4)^2-4b^2c^2\ge 0\Leftrightarrow|b^2+c^2-4|\ge 2bc$։ Քանի, որ $c\cdot a^2+(b^2+c^2-4)\cdot a+b^2c=0$ հավասարման a_1,a_2 արմատներից որևէ մեկը դրական է, իսկ $a_1a_2=\dfrac{b^2a}{c}>0$, հետևաբար $a_1>0,a_2>0$։ Այդ դեպքում $a_1+a_2=\dfrac{4-b^2-c^2}{c}>0$,

որտեղից $b^2+c^2<4$,հետևաբար

$\left|b^2+c^2-4\right| \geq 2bc \Leftrightarrow 4-b^2-c^2 \geq 2bc \Rightarrow (b+c)^2 \leq 4 \Rightarrow b+c \leq 2$, քանի, որ $b,c>0$:

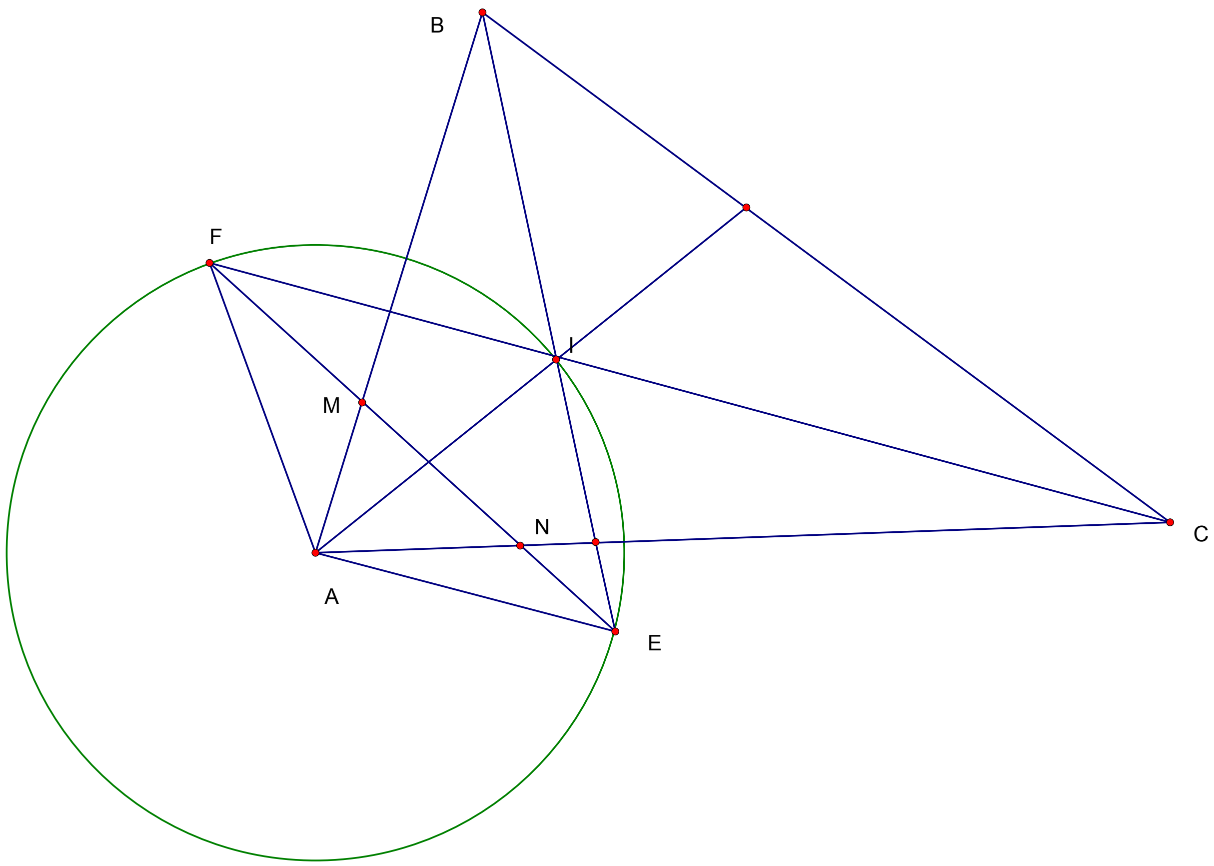
Գրված է քառակուսի հավասարան լուծում ունենալու պայմանը:

+ 2 միավոր

Ապացուցված է, որ $b^2+c^2<4$ + 2 միավոր

Խնդիրը լուծված է 7 միավոր

5) **Ա-4, Բ-4** I –ն ABC եռանկյան կիսորդների հատման կետն է: A կենտրոնով և IA շառավիղով շրջանագիծը CI և BI ուղիղները համապատասխանաբար հատում են I –ից տարբեր F և E կետերում: Դիցուք EF ուղիղը AB և AC հատվածները հատում են համապատասխանաբար M և N կետերում: Ապացուցեք, որ $CN+BM=EF+MN$:



Լուծում : Դիցուք $\angle A=2\alpha, \angle B=2\beta, \angle C=2\gamma$: Այդ դեպքում $\angle AEI=\angle AIE=\alpha+\beta \Rightarrow \angle IAE=180^{\circ}-2\alpha-2\beta=2\gamma$,իսկ $2\gamma=\angle IAE=2\angle EFI$ (միևնույն աղեղին հենված ներգծյալ և կենտրոնական անկյուններ), որտեղից $\angle EFC=\gamma=\angle FCN \Rightarrow FN=NC$: Քանի, որ $\angle AFI=\angle AIF=\alpha+\gamma$ և

$\angle EFC=\gamma \Rightarrow \angle AFE=\alpha=\angle AEF$: Քանի, որ $\angle AEI=\alpha+\beta$ և
$\angle AEF=\alpha \Rightarrow \angle MEB=\beta=\angle ABI \Rightarrow BM=ME$, ուստի
$BM+CN=ME+FN=MN+NE+FM+MN=EF+MN$:

$\angle IAE=180^\circ-2\alpha-2\beta=2\gamma$ + 1 միավոր

$\angle EFC=\gamma$ + 1 միավոր

$FN=NC$ + 1 միավոր

$BM=ME$ + 2 միավոր

$CN+BM=EF+MN$ + 2 միավոր

X դասարան

1) Ապացուցեք, որ գոյություն չունի n բնական թիվ այնպես, որ $\frac{7^n-1}{6^n-1}$ կոտորակի արժեքը բնական թիվ է:

Լուծում: 6^n -ի վերջին թվանշանը 6 է, հետևաբար $6^n-1 \vdots 5$: + 1 միավոր

Երբ $n=2k+1$, ապա 7^n –ի վերջին թվանշանը 3 կամ 7 է, հետևաբար 7^n-1 5-ի բազմապատիկ չէ: + 3 միավոր

Երբ $n=2k$, ապա $6^n-1=36^k-1 \vdots 35 \vdots 7$, իսկ 7^n-1-ը 7-ի բազմապատիկ չէ:

+ 3 միավոր

2) Ոչ զրոյական թվանշաններից կազմված տասանիշ թվի թվանշաններից ջնջել են կամայական յոթը և ստացված եռանիշ թվերը գումարել: Կարո՞ղ է արդյոք այդ գումարը հավասար լինել 20170:

Լուծում: Դիցուք a–ն 10-անիշ թվի թվանշաններից մեկն է: a թվանշանը պարունակող ստացված եռանիշ թվերի քանակը հավասար է $\frac{9\cdot 8}{2}=36$:

+ 3 միավոր

100a, 10a, a թվերը 3-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդները հավասար են:
+ 2 միավոր

Քանի, որ a–ն մասնակցում է 36 եռանիշ թվերի գրառմանը և a-ն կամայական է, հետևաբար ստացված եռանիշ թվերը գումարը բաժանվում է 3-ի, իսկ 20170-ը չի բաժանվում 3-ի: + 2 միավոր

***Դիտողություն:** Եթե գրված է ստացված եռանիշ թվերի քանակը՝ $C_{10}^{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}=120$:

1 միավոր

3)Դիցուք $a,b,c>0$ և $a^2+b^2+c^2=3abc$: Ապացուցեք, որ $(3a-2)(3b-2)(3c-2)\geq 1$:

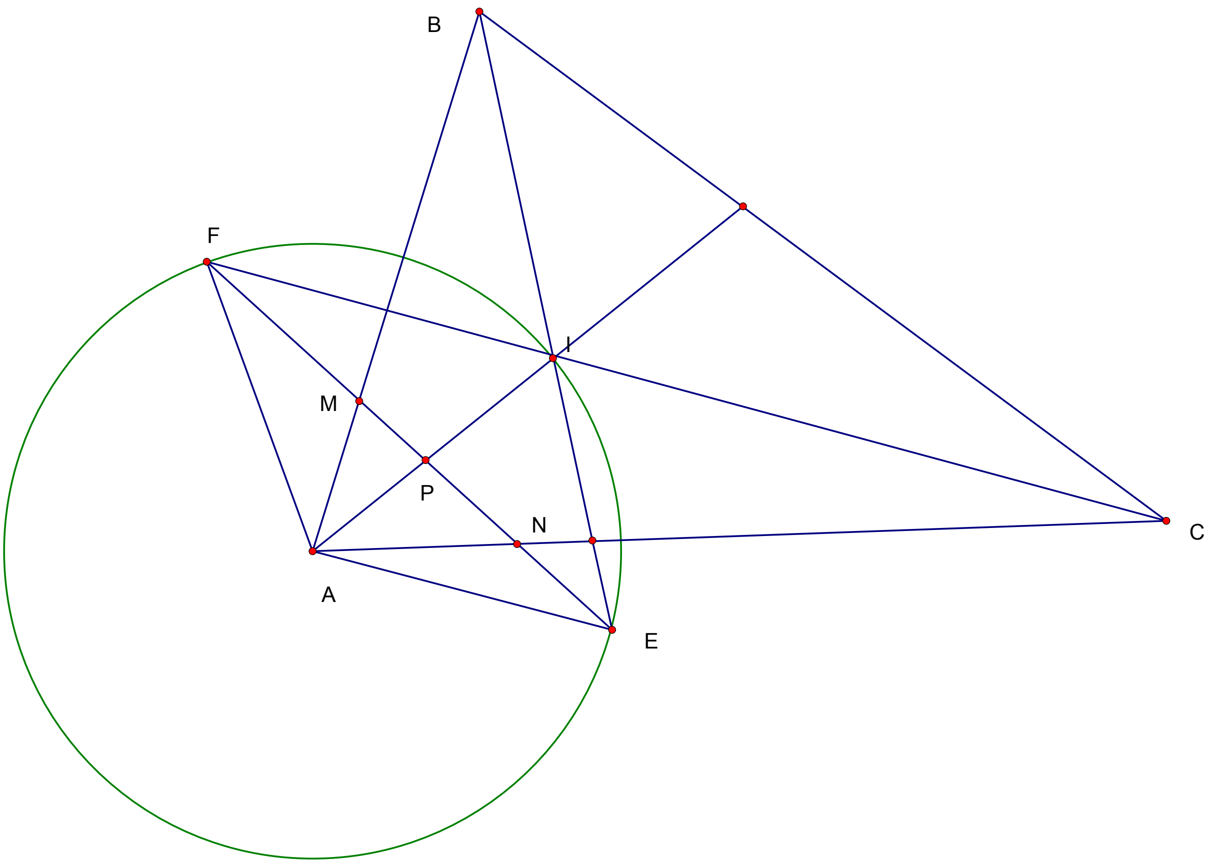
Լուծում 1: $3abc=a^2+b^2+c^2\geq a^2+2bc\Rightarrow bc(3a-2)\geq a^2\Rightarrow 3a-2\geq\frac{a^2}{bc}$: Նմանապես $3b-2\geq\frac{b^2}{ac}$ և $3c-2\geq\frac{c^2}{ab}$: Բազմապատկելով ստացված անհավասարությունները կստանանք՝ $(3a-2)(3b-2)(3c-2)\geq\frac{a^2}{bc}\frac{b^2}{ac}\frac{c^2}{ab}=1$:

Լուծում 2: $3a=\frac{a^2}{bc}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq\frac{a^2}{bc}+2\sqrt{\frac{b}{c}\frac{c}{b}}=\frac{a^2}{bc}+2\Rightarrow 3a-2\geq\frac{a^2}{bc}$: Նմանապես $3b-2\geq\frac{b^2}{ac}$ և $3c-2\geq\frac{c^2}{ab}$: Բազմապատկելով ստացված անհավասարությունները կստանանք՝ $(3a-2)(3b-2)(3c-2)\geq\frac{a^2}{bc}\frac{b^2}{ac}\frac{c^2}{ab}=1$:

Եթե տրվել է որևէ գնահատական	1 միավոր
Եթե տրվել է $3a-2$-ի որևէ գնահատական	3 միավոր
Խնդիրը լուծված է	7 միավոր

4) I –ն ABC եռանկյան կիսորդների հատման կետն է: A կենտրոնով և IA շառավիղով շրջանագիծը CI և BI ուղիղները համապատասխանաբար հատում են I –ից տարբեր F և E կետերում: Դիցուք EF ուղիղը AB, AC, AI հատվածները հատում են համապատասխանաբար M, N, P կետերում: Ապացուցեք, որ $\frac{PM}{PN}=\frac{PE}{PF}$:

Լուծում:



Լուծում : Դիցուք $\angle A=2\alpha, \angle B=2\beta, \angle C=2\gamma$: Այդ դեպքում $\angle AEI=\angle AIE=\alpha+\beta \Rightarrow \angle IAE=180^{\circ}-2\alpha-2\beta=2\gamma$,իսկ $2\gamma=\angle IAE=2\angle EFI$ (միևնույն աղեղին հենված ներգծյալ և կենտրոնական անկյուններ), որտեղից $\angle EFC = \gamma = \angle FCN$: Քանի, որ $\angle AFI = \angle AIF = \alpha + \gamma$ և $\angle EFC = \gamma \Rightarrow \angle AFE = \alpha = \angle AEF$, հետևաբար $\triangle AMP \sim \triangle AFP$ և $\triangle ANP \sim \triangle AEP$, որտեղից $AP^2 = PM \cdot PF = PN \cdot PE$, որտեղից $\frac{PM}{PN} = \frac{PE}{PF}$:

$\angle IAE = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 2\gamma$ + 1 միավոր

$\angle EFC = \gamma$ + 2 միավոր

$\angle AFE = \angle AEF = \alpha$ + 1 միավոր

$\triangle AMP \sim \triangle AFM$ կամ $\triangle AMP \sim \triangle AFM$ + 1 միավոր

Խնդիրը լուծված է 7 միավոր

Դիտողություն: Քանի, որ $\angle AFM = \angle MAP$, ուստի PA–ն AFM եռանկյան արտագծած շրջանագծի շոշափողն է: -0 միավոր

XI- XII դասարան

1) Ոչ զրոյական թվանշաններից կազմված տասանիշ թվի թվանշաններից ջնջել են կամայական վեցը և ստացված քառանիշ թվերը գումարել: Կարո՞ղ է արդյոք այդ գումարը հավասար լինել 2017000 :

Լուծում: Դիցուք a–ն 10-անիշ թվի թվանշաններից մեկն է: a թվանշանը պարունակող ստացված քառանիշ թվերի քանակը հավասար է $C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$:

\+ 3 միավոր

100a, 10a, a թվերը 3-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդները հավասար են:
\+ 2 միավոր

Քանի, որ a–ն մասնակցում է 84 քառանիշ թվերի գրառմանը և a-ն կամայական է, հետևաբար ստացված քառանիշ թվերը գումարը բաժանվում է 3-ի, իսկ 2017000-ը չի բաժանվում 3-ի: + 2 միավոր

***Դիտողություն:** Եթե գրված է ստացված քառանիշ թվերի քանակը $C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{24} = 210$: 1 միավոր

2) Դիցուք $a, b, c > 0$ և $a^3 + b^3 + c^3 + 1 = 4abc$: Ապացուցեք, որ $(4a-3)(4b-3)(4c-3) \geq abc$:

Լուծում 1: $4abc = a^3 + b^3 + c^3 + 1 \ge a^3 + 3\sqrt[3]{b^3 \cdot c^3 \cdot 1} = a^3 + 3bc \Rightarrow bc(4a-3) \ge a^3 \Rightarrow 4a-3 \ge \dfrac{a^3}{bc}$:

Նմանապես $4b-3 \ge \dfrac{b^3}{ac}$ և $4c-3 \ge \dfrac{c^3}{ab}$: Բազմապատկելով ստացված

անհավասարությունները կստանանք՝ $(4a-3)(4b-3)(4c-3) \ge \dfrac{a^3}{bc}\dfrac{b^3}{ac}\dfrac{c^3}{ab} = abc$:

Լուծում 2: $4a = \dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{b} + \dfrac{1}{bc} \ge \dfrac{a^3}{bc} + 3\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{c} \cdot \dfrac{c^2}{b} \cdot \dfrac{1}{bc}} = \dfrac{a^3}{bc} + 3 \Rightarrow 4a-3 \ge \dfrac{a^3}{bc}$: Նմանապես

$4b-3 \ge \dfrac{b^3}{ac}$ և $4c-3 \ge \dfrac{c^3}{ab}$: Բազմապատկելով ստացված անհավասարությունները

կստանանք՝ $(4a-3)(4b-3)(4c-3) \ge \dfrac{a^3}{bc}\dfrac{b^3}{ac}\dfrac{c^3}{ab} = abc$:

Եթե տրվել է որևէ գնահատական 1 միավոր

Եթե տրվել է $4a-3$-ի որևէ գնահատական 2 միավոր

Խնդիրը լուծված է 7 միավոր

3) Դիցուք $n = d_1 > d_2 > d_3 > \cdots > d_p = 1$ թվերը n բնական թվի բաժանարարներն են: Գտեք բոլոր n բնական թվերը այնպես, որ $d_1 - d_2 + d_3 - \cdots + (-1)^{p-1} d_p = n-1$:

Լուծում: Եթե n–ը լրիվ քառակուսի չէ, ապա նրա բաժանարարները կարելի է բաժանել $\left(d, \dfrac{n}{d}\right)$ զույգերի, հետևաբար $\left(d, \dfrac{n}{d}\right)$–ի բաժանարարների քանակը զույգ է՝ $p = 2m$: +1 միավոր

Այդ դեպքում

$$n-1 = d_1 - d_2 + d_3 - \cdots + (-1)^{p-1} d_p = d_1 - (d_2 - d_3) - \cdots - (d_{2m-2} - d_{2m-1}) - d_{2m} \le n - m,$$

որտեղից $m = 1$, այսինքն n–ը պարզ թիվ է: Պարզ է, որ բոլոր պարզ թվերը բավարարում են խնդրի պայմաններին: +2 միավոր

Եթե n–ը լրիվ քառակուսի է: Այդ դեպքում $p = 2m-1$ և

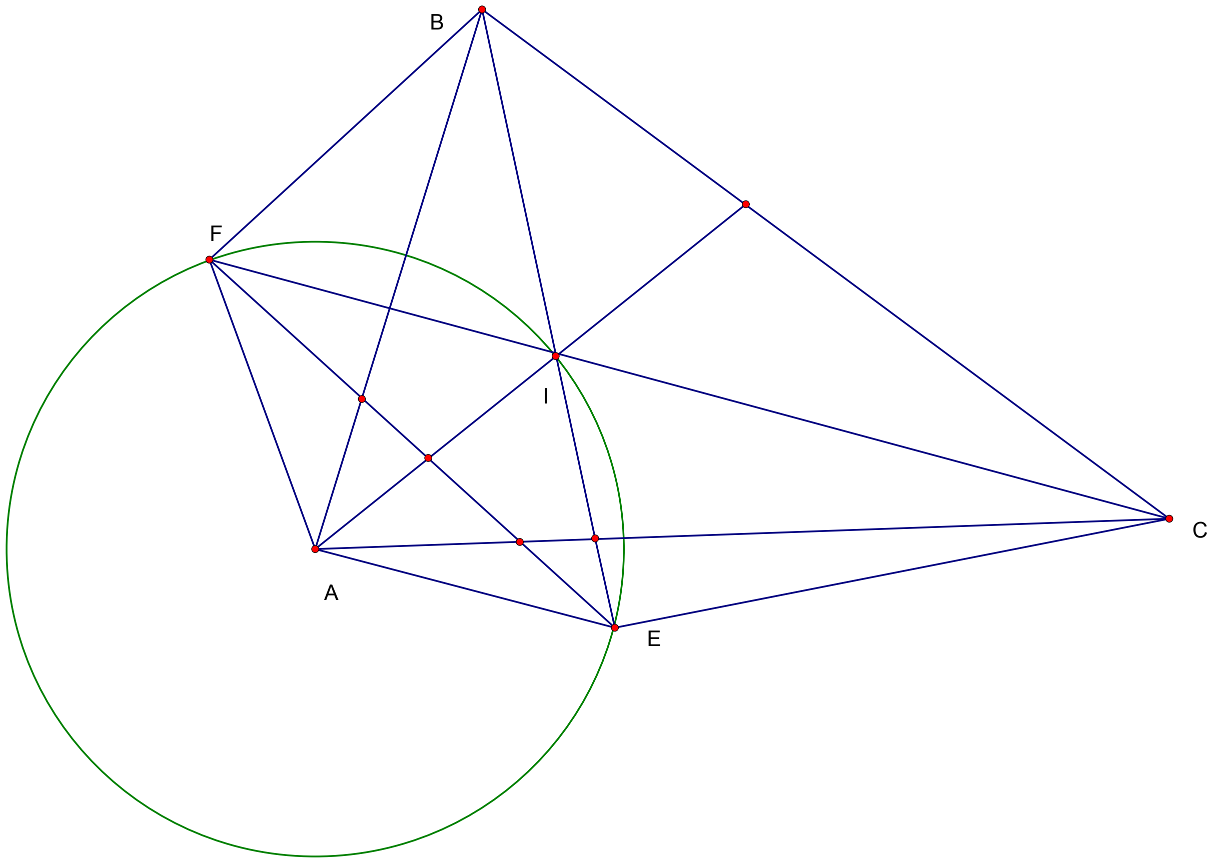
$n-1 = d_1 - d_2 + d_3 - \cdots + (-1)^{p-1} d_p = d_1 - (d_2 - d_3) - \cdots - (d_{2m-1} - d_{2m}) \le n - m + 1$,որտեղից $m \le 2$: +2 միավոր

Եթե $m = 1$, ապա $p = 1$, որտեղից $n = 1$, որը չի բավարարում:

Եթե $m = 2$, ապա $p = 3$, որտեղից $n = q^2$, որտեղ q–ն պարզ թիվ է:

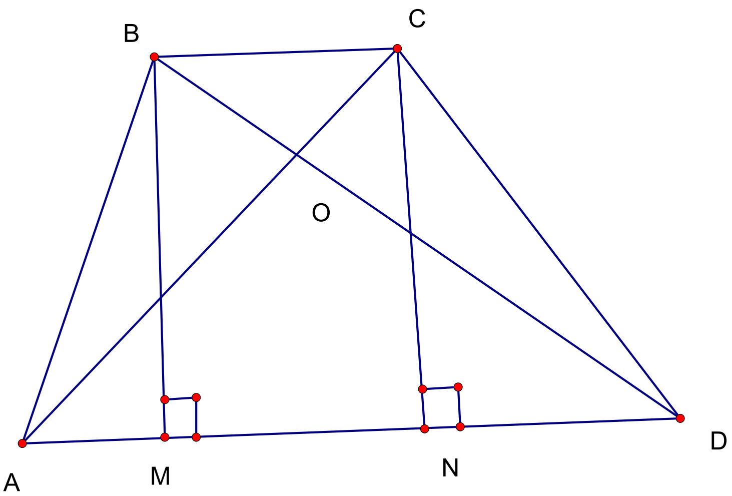
Այդ դեպքում $n = q^2 \Rightarrow d_1 - d_2 + d_3 = q^2 - q + 1 = q^2 - 1 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow n = 4$: +2 միավոր

4) I –ն ABC եռանկյան կիսորդների հատման կետն է: A կենտրոնով և IA շառավիղով շրջանագիծը CI և BI ուղիղները համապատասխանաբար հատում են I –ից տարբեր F և E կետերում: Ապացուցեք, որ $S_{BFI} = S_{CEI}$:



Լուծում 1 : Դիցուք $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma$: Այդ դեպքում $\angle AEI = \angle AIE = \alpha + \beta \Rightarrow \angle IAE = 180^{\circ} - 2\alpha - 2\beta = 2\gamma$,իսկ $2\gamma = \angle IAE = 2\angle EFI$ (միևնույն աղեղին հենված ներգծյալ և կենտրոնական անկյուններ), որտեղից $\angle EFC = \gamma$: Ստացվեց, որ $\angle EFC = \angle BCF = \gamma$, որտեղից $EF \parallel BC$:

Լեմմա: ABCD քառանկյան անկյունագծերը հատվում են O կետում, իսկ BC և AD կողմերը զուգահեռ են: Ապացուցեք, որ $S_{ABO} = S_{CDO}$:



Ապացույց:

Քանի, որ $EF \parallel BC$, հետևաբար $S_{ABO} = S_{ABD} - S_{AOD} = S_{ACD} - S_{AOD} = S_{CDO}$:

Ըստ լեմմայի՝ $S_{ABO} = S_{CDO}$:

$\angle AEI = \angle AIE = \alpha + \beta$ + 1 միավոր

$\angle IAE = 180^{\circ} - 2\alpha - 2\beta = 2\gamma$ + 1 միավոր

$\angle EFC = \gamma$ +1 միավոր

$EF \parallel BC$ +1 միավոր

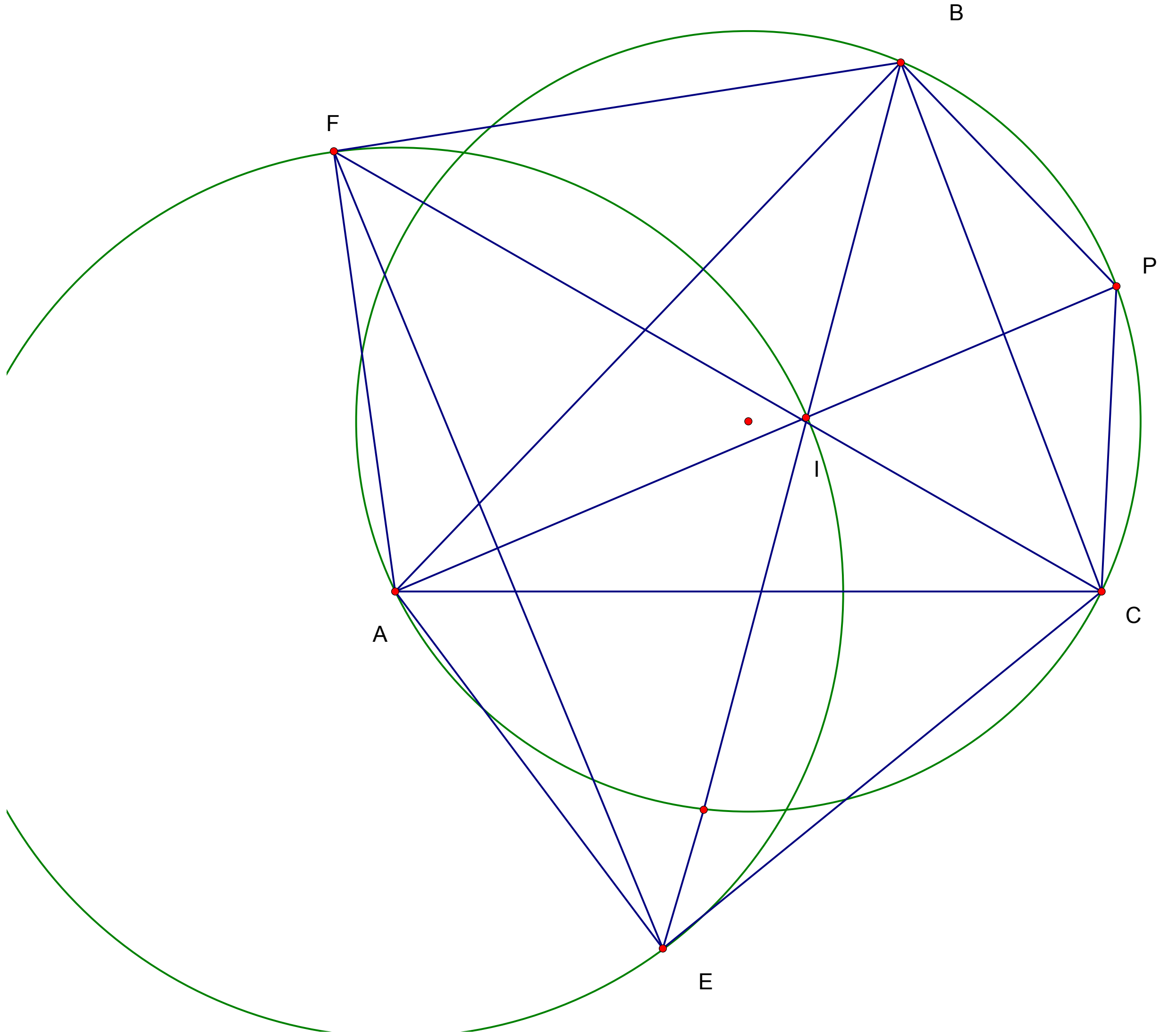
$S_{ABO} = S_{CDO}$ +3 միավոր:

Լուծում 2: Դիցուք AI ուղիղը ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծը հատում է P կետում: (P-ն BPC աղեղի միջնակետն է)

$\angle CBP = \angle PAC = \alpha \Rightarrow \angle IPB = \alpha + \beta = \angle BIP \Rightarrow \triangle AIE \sim \triangle BIP \Rightarrow \frac{IE}{BI} = \frac{AI}{IP}$:

Նմանապես $\triangle IPC \sim \triangle AEI \Rightarrow \frac{IE}{BI} = \frac{FI}{IC}$, որտեղից $\frac{IE}{BI} = \frac{FI}{IC} \Rightarrow IE \cdot IC = FI \cdot BI$:

$S_{BFI} = \frac{1}{2} FI \cdot BI \cdot \sin \angle FIB = \frac{1}{2} IE \cdot IC \cdot \sin \angle EIC = S_{CEI}$:



AI ուղիղը ABC եռանկյան արտագծած շրջանագիծը հատում է P կետում:

+ 1 միավոր

$\angle IPB = \alpha + \beta = \angle BIP$ + 1 միավոր

$\triangle AIE \sim \triangle BIP \Rightarrow \dfrac{IE}{BI} = \dfrac{AI}{IP}$ + 2 միավոր

$\triangle IPC \sim \triangle AEI \Rightarrow \dfrac{IE}{BI} = \dfrac{FI}{IC}$ + 1 միավոր

$S_{BFI} = S_{CEI}$ + 2 միավոր